Ziffern, Zahlen, Zahlensysteme und Pippi Langstrumpfs Rechenregeln

Dr. Manfred Dietrich; Astrowis e.V.

Gauß-Woche 2025, Carl-Friedrich-Gauß Gymnasium Frankfurt(Oder)

1. Ziffern und Zahlen

- Bilden die Grundlage der Mathematik
- Übermittlung von Werten
- Treten überall im Leben auf, nicht von der Natur abgeschaut, Eigenentwicklung des Menschen
- Zahlen werden aus Ziffern gebildet
- Neben Ziffern werden auch Zeichen für die Zahlendarstellung genutzt: Komma, Punkt, Wurzelzeichen, Hochgestellte Ziffern, Bruchstrich
- Besondere Zahlen: Eulersche Zahl e =2,718 …. , Zahl Pi π = 3,1415 ….

1. Ziffern und Zahlen

1.1. Römische Ziffern und andere Buchstaben orientierte Ziffernsysteme

Römische Ziffern											
Groß-buch-staben	I	V	X	L	C	D	M	ↁ	ↂ	ↇ	ↈ
Wert	1	5	10	50	100	500	1000	5000	10.000	50.000	100.000

1. Ziffern und Zahlen
1.1. Römische Ziffern und andere Buchstaben orientierte Ziffernsysteme

- Darstellung von links nach rechts
- links steht der höchste Wert, rechts der niedrigste
- Werte werden addiert
- Steht ein niedriger Wert links vor einem höheren, so wird er abgezogen
- Sonst keine feste Stelle für ein Zeichen vorgegeben
- Es gibt keine Null
- Beispiele:
  - MMXXIV = 2024
  - CMLXXV = 975
- Addition und Subtraktion noch einigermaßen gut durchführbar
- Multiplikation, Division eher schwierig

1. Ziffern und Zahlen
1.1. Römische Ziffern und andere Buchstaben orientierte Ziffernsysteme

- Hebräisches Zahlensystem
  - Verwendung des hebräischen Alphabets
  - Größte Ziffer steht immer rechts, kleinste immer links, keine Null
  - Größere Zahlen darstellbar durch Gruppen (ganz rechts wieder die größte, z.B. Millionen rechts von Tausender) → umgekehrt zu unserem Zahlensystem
  - Beispiel: של סט = 330.069

Aleph	Beth	Gimel	Daleth	He	Waw	Zajin	Chet	Tet
א	ב	ג	ד	ה	ו	ז	ח	ט
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Jod	Kaph	Lamed	Mem	Nun	Samech	Ajin	Pe	Tzade
י	כ	ל	מ	נ	ס	ע	פ	צ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
Koph	Resch	Schin	Taw					
ק	ר	ש	ת					
100	200	300	400					

1. Ziffern und Zahlen
1.1. Römische Ziffern und andere Buchstaben orientierte Ziffernsysteme

- Weitere Zahlensysteme
    - Ägyptisch, Arabisch, Armenisch, Babylonisch, Brahmi, Chinesisch, Etruskisch, Glagolitisch, Griechisch, Indisch, Japanisch, Khmer, Koptisch, Koreanisch, Kyrillisch, Maya, Römisch, Sanskrit, Thai
- Alle Kulturen entwickelten Zahlensysteme

1. Ziffern und Zahlen
1.2. Indisch-arabische Ziffern und Zahlen

- Erfindung der Inder
- Über Arabien zu uns nach Europa gelangt
- Heute das wichtigste Zahlensystem
- International anerkannt und in Wissenschaft verbreitet
- Besonderheit: Es gibt die Null → Voraussetzung für die exakte und eindeutige Darstellung großer Zahlen (größte mathematische Erfindung?!)
- Eindeutige Ausweisung jeder Stelle möglich

1. Ziffern und Zahlen
1.2. Indisch-arabische Ziffern und Zahlen

- Darstellung der Ziffern in den Kulturkreisen aber differenziert
- Im Handel, Wissenschaft und Technik wird aber die europäische Schreibweise bevorzugt

Europäisch	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Arabisch-Indisch	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
Östliches Arabisch-Indisch (Persisch und Urdu)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
Devanagari (Hindi)	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९
Tamil		௧	௨	௩	௪	௫	௬	௭	௮	௯

2. Zahlensysteme
2.1 Dezimalsystem

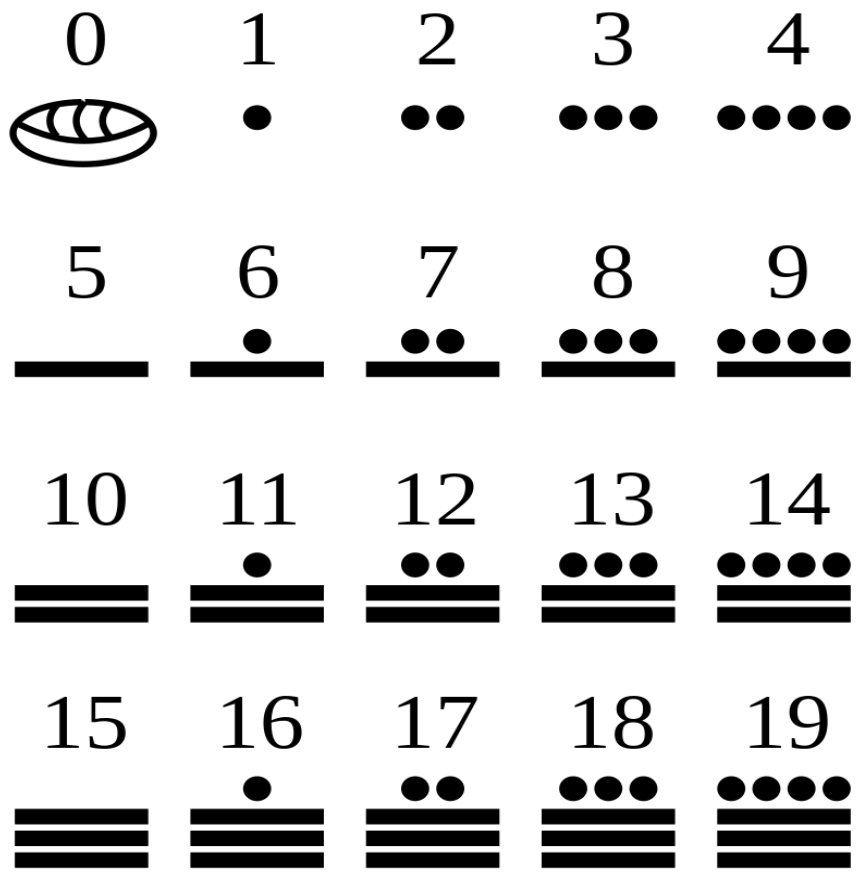
- Wichtigste Zahlensystem für uns
- Täglich nutzbar
- Es gibt 10 Ziffern: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9
- Jede Stelle einer Zahl steht für eine Zehnerpotenz
- Dabei steht die höhere Zehnerpotenz immer links
- Zahlen werden deshalb von links nach rechts gelesen
- Das Komma (im englischsprachigen Raum der Punkt) trennt die positiven Zehnerpotenzen von den negative Zehnerpotenzen
- Vor dem Komma beginnt die Reihe mit der Zehnerpotenz = 0 und zählt dann hoch
- Nach dem Komma kommt die Zehnerpotenz -1 und zählt dann noch rechts herunter

2. Zahlensysteme
2.1 Dezimalsystem

- Beispiele:
  - 1467 // 234,9876
- Punkt (englisch: Komma) kann benutzt werden zur Verbesserung der Übersichtlichkeit
  - Beispiel: 12.865.353.234,334.982 (englisch: 12,865,353,234.334,982)
- Daneben auch genutzt zur Verkürzung der Schreibweise Exponenten-Schreibweise
  - Beispiel: $345*10^8$, $92*10^{10^{120}}$
- Auch Wurzelschreibweise möglich:
  - Beispiel $\sqrt[3]{125}$ als Exponent $125^{1/3}$
- Englische Schreibweise in der Informatik und in der Wissenschaft üblich

2. Zahlensysteme
2.2 System der Maya

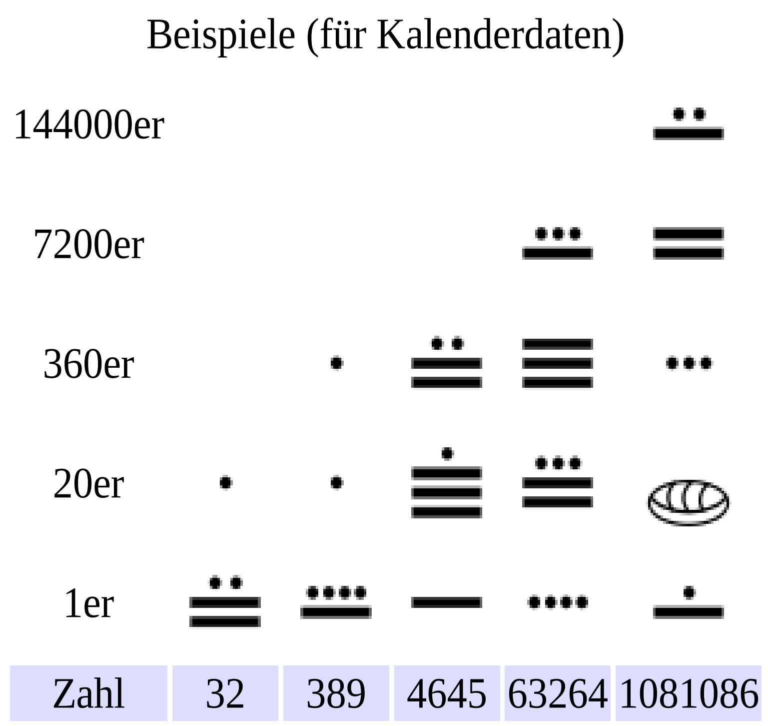
- Beruht auf die Grundbasis 20 statt 10 mit einem 5er Untersystem
- Ein Punkt bedeutet immer eins, zwei Punkte bedeuten 2, ab fünf wir ein Strich verwendet
- Sie haben auch die Ziffer Null



2. Zahlensysteme
2.2 System der Maya

- Sie haben auch ein Stellensystem (lesen von oben nach unten)
- Statt Zehnerpotenzen verwenden die Maya aber 20iger Potenzen
- Zweite Stelle aber nur Ziffern bis 17, daher 360 → auf Sonnenjahr bezogen

Maya System



2. Zahlensysteme
2.3 Andere Zahlensysteme

- Im täglichen Leben hat noch das Zwölfer-Systeme eine besondere Rolle
    - Dutzend, Schock, Gros im täglichen Leben noch verbreitet
    - Die Zahlen elf und zwölf haben eher Ziffernnamen (sonst einzehn, zweizehn?!), im englischen auch eleven, twelve
    - Im tschechischen dagegen jedenáct, dvanáct, Im russischen auch одиннадцать, двенадцать
    - Anwendung des Zwölfersystems in der Zeitrechnung:
        - Tag hat 2*12 Stunden, Stunde hat 5*12 Minuten, Minute hat 5*12 Sekunden (Sexagualsystem/60 von den Babyloniern)

        - Vorgeschlagene Ziffern (engl.) 123456789↊↋0

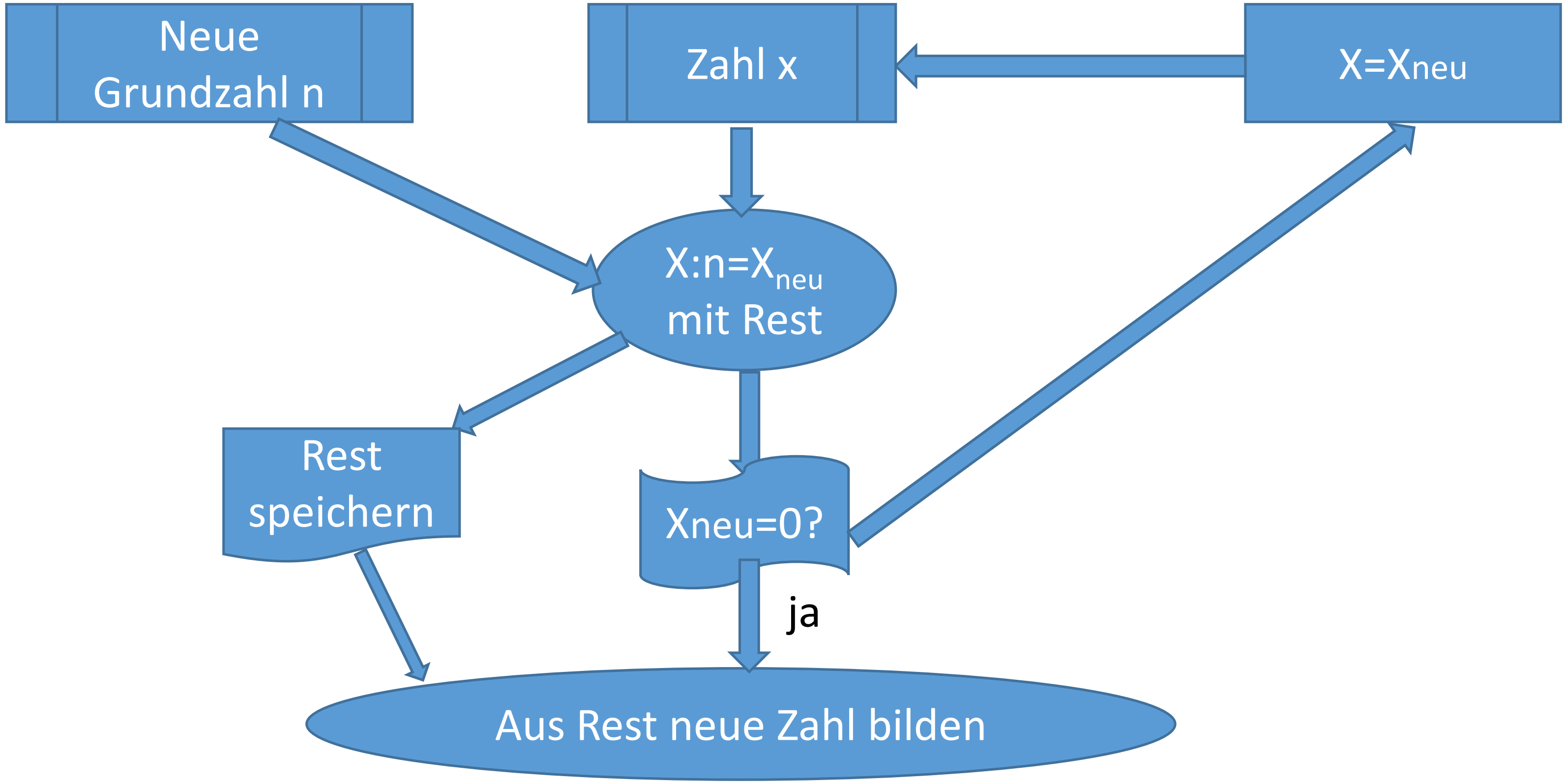
2. Zahlensysteme
2.3 Andere Zahlensysteme

- Wichtig ist auch das binäre System: Ziffern 0 und 1
  - Sehr einfache Rechenregeln
  - Anwendung in der Computertechnik
  - Computer rechnen im binären System
  - Ableitungen dazu sind das hexadezimale und das oktale System (rechentechnisch Word und Byte)
    hexadezimal: Ziffern zusätzlich mit Buchstaben A-F dargestellt

2. Zahlensysteme

2.4 Umrechnung von Zahlensystemen

- Ausgangszahl wird durch die neue Grundzahl des neuen Systems geteilt
  → Rechenregeln des alten Systems anwenden



2. Zahlensysteme
2.4 Umrechnung von Zahlensystemen

- Beispiel: Umrechnung von 10er-System ins 5er-System
  - Rechnung: Ausgangszahl **278_{10}** (Einmaleins des 10er-Systems wird angewendet)
    - 278:5 = 55 Rest 3
    - 55:5 = 11 Rest 0
    - 11:5 = 2 Rest 1
    - 2:5 = 0 Rest 2
  - Neue Zahl erstellen: Zahl = 2103_5
    - Probe (mit Einmaleins des 10er-Systems)
    - $2*5^3 + 1*5^2 + 0*5^1 + 3*5^0 =$
      $2*125_{10} + 1*25_{10} + 0*5_{10} + 3*1_{10} =$
      $250_{10} + 25_{10} + 0_{10} + 3_{10} =$ **278_{10}**

3. Zahlenklassen
3.1 Zahlen auf dem Zahlenstrahl

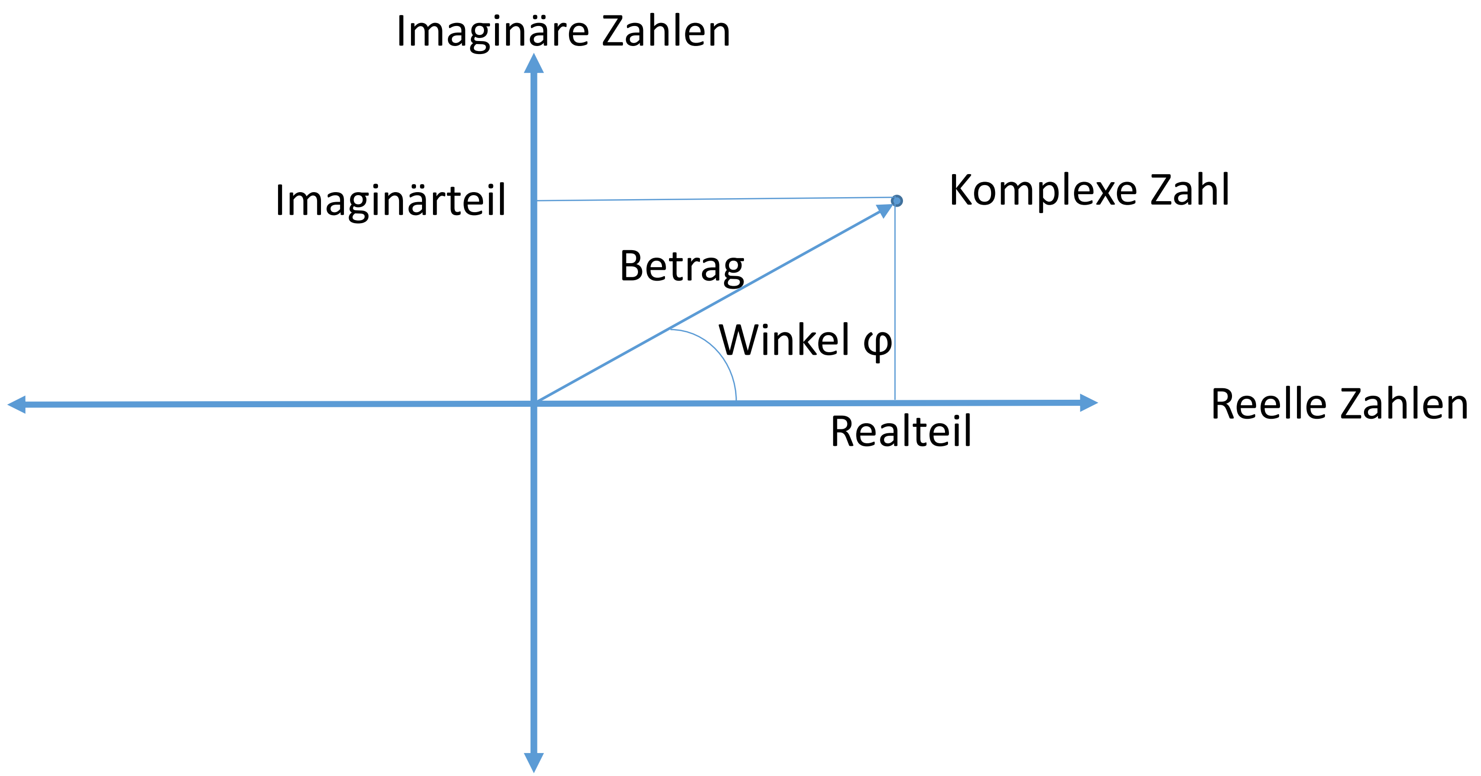
- Natürliche Zahlen (positive ganze Zahlen)
  - Primzahlen als Besonderheit
- Ganze Zahlen (Ergänzung durch negative Zahlen)
- Rationale Zahlen (Brüche)
- Algebraische Zahlen (Ergebnisse aus Gleichungen, z.B. $\sqrt{2}$)
- Irrationale Zahlen (z.B. Eulersche Zahl e, Kreiszahl π)
- Reelle Zahlen (alle Zahlen, die auf dem Zahlenstrahl liegen)

3. Zahlenklassen
3.2 Komplexe Zahlen

- Imaginäre Zahlen abgeleitet aus der $\sqrt{-1}$= i oder j
  - Imaginäre Zahl gleich reelle Zahl *i (z.B. 7,3i)
  - Neue Menge der Zahlen
- Komplexe Zahlen
  - Reelle Zahl + imaginäre Zahl = komplexe Zahl
  - Beispiel: 3+4i
  - Reelle Zahlen und imaginäre Zahlen sind Teilmenge der komplexen Zahlen
  - Es gibt aber komplexe Zahlen, die weder reelle noch imaginäre Zahlen sind
  - Darstellung als Summe (Realteil + Imaginärteil) oder als Produkt (Betrag*$e^{i\varphi}$)

3. Zahlenklassen
3.2 Komplexe Zahlen

- Anwendung in der Elektrotechnik/Elektronik
- Darstellung komplexer Zahlen in der Ebene (2dimensionale Darstellung)



4. Pippi Langstrumpf
4.1 Behauptung „2 mal 3 ist 4“

• Ausgangspunkt	-24 = -24
• Umwandlung	36 - 60 = 16 - 40
• Addition von +25	36 - 60 + 25 = 16 - 40 + 25
• Andere Darstellung	6*6 - 2*6*5 + 5*5 = 4*4 - 2*4*5 + 5*5
• Einführung binomische Formel:	a*a - 2*a*b + b*b = (a-b)**2
• Anwendung binomischer Formel:	(6 – 5)**2 = (4 – 5)**2
• Wurzel ziehen	6 – 5 = 4 – 5
• 5 addieren	6 – 5 + 5 = 4 -5 + 5
• Addition ausführen	6 = 4
• 6 in Primzahlen zerlegen	2 * 3 = 4
• → **Beweis erbracht?!**	

Danke, dass ihr mir nicht glaubt, aber zugehört habt!

Fragen, Anmerkungen, Ergänzungen oder Widerspruch sind willkommen.

Eine besondere Zahl zum Abschluss:

153